Hong Kong Mathematics Olympiad (2010 / 2011)
Heat Event (Group)
香港数学竞赛 (2010 / 2011)
初赛项目(团体)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 若 $(1000-a)(1000-b)(1000-c)(1000-d)(1000-e)=24^2$，其中 a、b、c、d 及 e 为偶数，且 $a>b>c>d>e$，求 a，b，c，d 及 e 的值。
If $(1000-a)(1000-b)(1000-c)(1000-d)(1000-e)=24^2$, where a, b, c, d and e are even numbers and $a>b>c>d>e$, find the values of a, b, c, d and e.

2. 以 $\overline{ab}$ 表示一个两位数，其十位是 a，个位是 b，且 $R_{\overline{ab}}$ 表示 $\overline{ab}$ 除以 $a+b$ 的余数。求 $R_{\overline{ab}}$ 的最大值。
$\overline{ab}$ denotes a two-digit number with a as the tens digit and b as the unit digit. $R_{\overline{ab}}$ is the remainder when $\overline{ab}$ is divided by $a+b$. Find the maximum value of $R_{\overline{ab}}$.

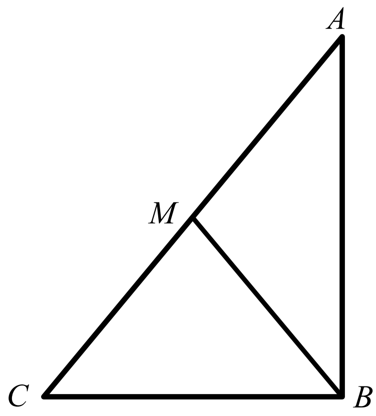
3. 已知 a、b、c 为整数，且 $a+b=2011$，$c-a=2010$，$a<b$。求 $a+b+c$ 的可能最大值。
Given that a, b and c are integers, and $a+b=2011$, $c-–a=2010$, $a<b$. Find the greatest possible value of $a+b+c$.

4. 已知 n 为一正整数，且 n^4-18n^2+49 为一质数。求 n 的值。
Given that n is a positive integer and n^4-18n^2+49 is a prime number, find the value of n.

5. 已知 $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$，其中 x 是实数。
求 $f\left(\dfrac{1}{2011}\right)+f\left(\dfrac{2}{2011}\right)+f\left(\dfrac{3}{2011}\right)+\cdots+f\left(\dfrac{2009}{2011}\right)+f\left(\dfrac{2010}{2011}\right)$ 的值。

Given that $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$, where x is a real number, find the value of
$$f\left(\frac{1}{2011}\right)+f\left(\frac{2}{2011}\right)+f\left(\frac{3}{2011}\right)+\cdots+f\left(\frac{2009}{2011}\right)+f\left(\frac{2010}{2011}\right).$$

6. 如图一，M 为 AC 上的一点，$AM = MC = BM = 3$ 。求 $AB + BC$ 的最大值。
In Figure 1, M is a point on AC, $AM = MC = BM = 3$. Find the maximum value of $AB + BC$.



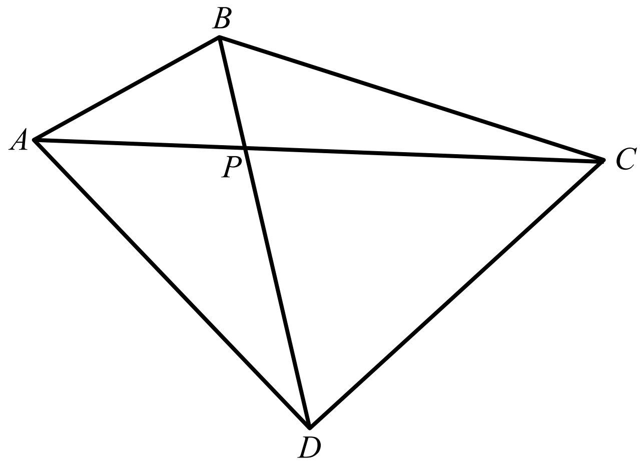
图一
Figure 1

7. 已知 $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ 且 $\dfrac{2011!}{10^k}$ 是整数，其中 k 是正整数。若 S 是 k 的所有可能值之和，求 S 的值。
Given that $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 3 \times 2 \times 1$ and $\dfrac{2011!}{10^k}$ is an integer, where k is a positive integer. If S is the sum of all possible values of k, find the value of S.

8. 已知 a、b、c 及 d 为非负整数，且 $ac + bd + ad + bc = 2011$。求 $a + b + c + d$ 的值。
Given that a, b, c and d are non-negative integers and $ac + bd + ad + bc = 2011$. Find the value of $a + b + c + d$.

9. 如图二，$ABCD$ 为一凸四边形，$\angle BAC = 27°$，$\angle BCA = 18°$，$\angle BDC = 54°$，$\angle BDA = 36°$，且四边形的对角线 AC 、 BD 相交于 P 。求 $\angle CPB$ 。

In Figure 2, $ABCD$ is a convex quadrilateral, $\angle BAC = 27°$, $\angle BCA = 18°$, $\angle BDC = 54°$, $\angle BDA = 36°$. The diagonals AC and BD intersect at P. Find $\angle CPB$.

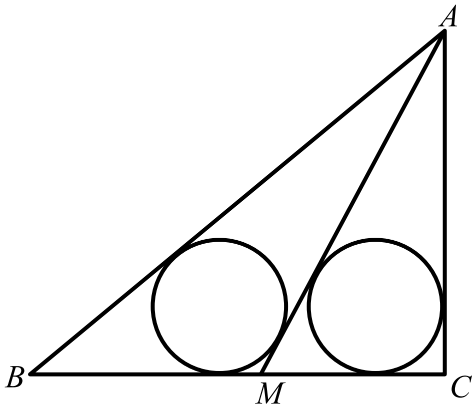


图二

Figure 2

10. 如图三，$AC = 3$，$BC = 4$ 及 $\angle C = 90°$。 M 是 BC 上的一点使得 ΔABM 及 ΔACM 的内切圆相等。求 AM 的长。

In Figure 3, $AC = 3$, $BC = 4$ and $\angle C = 90°$. M is a point on BC such that the incircles in ΔABM and ΔACM are equal. Find the length of AM .



图三

Figure 3